

# Comparativa entre los algoritmos DE y PSO aplicada a la demodulación de interferogramas de franjas cerradas modeladas por polinomios de Zernike

Juan de Anda y Martín Carpio, Héctor J. Puga, Luis Mancilla Espinoza,  
Manuel Ornelas, Rosario Baltazar y Marco Sotelo

División de Estudios de Posgrado e Investigación,  
Instituto Tecnológico de León,  
León, Guanajuato, 37290, México  
juandanda2@gmail.com, jmcarpio61@hotmail.com

**Resumen** Se presentan los resultados de comparación de los algoritmos de Evolución Diferencial (DE) y Particle Swarm Optimization (PSO), aplicados al problema de demodulación de interferogramas de franja cerrada modeladas con polinomios de Zernike. Se muestra la recuperación de la fase encerrada de un interferograma simulado, a partir de una función de aptitud representada como combinación lineal de polinomios de Zernike. Posteriormente se aplica la prueba de suma de rangos con signo de Wilcoxon, con el objetivo de discernir qué algoritmo presenta mejor desempeño en la demodulación de interferogramas.

**Palabras clave:** demodular, interferograma, polinomio de Zernike, optimización, evolución diferencial, particle swarm optimization.

## 1. Introducción

La Interferometría, es un conjunto de técnicas que hacen uso de la superposición de ondas electromagnéticas coherentes, con el objetivo de extraer información que se encuentra en la onda. Es una importante técnica utilizada en metrología óptica, astronomía, espectroscopía y oceanografía. Éstas buscan medir pequeños desplazamientos, cambios de índice refractivo e irregularidades en las superficies de estudio [1,2].

En el caso de metrología óptica, el modelo matemático que gobierna el patrón de interferencia tiene un comportamiento cosenoidal y está dada en [3]:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\Theta(x, y)]. \quad (1)$$

Donde  $a(x, y)$  es la luminosidad de fondo,  $b(x, y)$  es la amplitud de modulación y  $\Theta(x, y)$  es la fase de la onda electromagnética.

La idea principal es recuperar la fase  $\Theta(x, y)$  del patrón de franjas, que está directamente relacionada con las variables físicas del problema de estudio. La

forma en que se lleva a cabo dicha recuperación es a partir del experimento de interferencia, y que posteriormente es capturado en una imagen digital para realizar el procesamiento computacional.

Podemos separar los patrones de interferencia (Interferogramas) en dos clases, la primera contiene franjas abiertas y la segunda está constituida por franjas cerradas [1]. Para el primer caso existen técnicas basadas en el uso de la transformada de Fourier, por ejemplo, [4,5]. Sin embargo, éstos métodos sólo funcionan si tienen frecuencia portadora y la señal cuenta con poco ruido. Más aun, si dichos métodos son aplicados a interferogramas de franja cerrada tienden a fallar en el proceso de demodulación.

Al problema de demodulación de interferogramas de franja cerrada, recientemente se le ha aplicado técnicas de Soft Computing, tales como Artificial Neural Network (ANN), Genetic Algorithms (GA) y Particle Swarm Optimization (PSO). En el área de las ANN se han utilizado redes multi-capas, que son entrenadas basándose en el método del descenso de gradiente y usando los patrones de franjas [6].

Por parte de los GA se han utilizado diferentes bases polinomiales para modelar la fase. Cuevas et al. [7], utiliza una representación en base monomial de la fase para realizar la demodulación del interferograma, mientras que Mancilla et al. [8], utiliza una representación de la fase en la base ortogonal de Zernike, logrando así disminuir el tiempo en la demodulación.

Jiménez et al. [9], busca evitar la representación binaria utilizada en el GA y aplica el algoritmo PSO, el cual tiene naturaleza de ser utilizado en el dominio de los números reales. También realiza un conteo de franjas que permite disminuir el rango de búsqueda de la población inicial. Sin embargo, se presenta el problema de que las velocidades que caracterizan al PSO, escapan del rango definido para el interferograma y tienen que hacer ciertas modificaciones al algoritmo.

En el presente artículo se trata de resolver el problema de la demodulación de interferogramas, modelando la fase del interferograma con polinomios ortogonales de Zernike, utilizando los algoritmos de Evolución diferencial [10] y Particle Swarm Optimization [11]. Con el objetivo de discernir el Desempeño de los algoritmos bajo el criterio de mismo número de llamadas a función (NLF) y utilizando la prueba de suma de rangos con signo de Wilcoxon [12].

La Evolución Diferencial es un nuevo enfoque heurístico que permite minimizar o maximizar problemas de funciones de varias variables en el espacio continuo, utilizando cuatro parámetros, que son el *Peso Diferencial* (F), *Probabilidad de Cruza* (PC), *Número de Población* (NP) y el *Número de Llamadas a Función* (NLF).

El algoritmo PSO [11], fue inspirado en el comportamiento social de las parvas de pájaros y cardúmenes de peces, en cuanto a la optimización de movimientos a través del cielo y el mar respectivamente. Básicamente el algoritmo trabaja con una búsqueda de optimización local (*Local Best*) y una optimización global (*Global best*), con respecto a la función a optimizar, que se van actualizando con respecto a una nueva población en la siguiente iteración, utilizando cambios de posición dadas por restas vectoriales entre las posiciones de los mejo-

res locales y el mejor global, que es modulada por dos pesos, el *peso de suavidad local* ( $\varphi_2$ ) y el *peso de suavidad global* ( $\varphi_1$ ) definido en todos los reales [11]. Sin embargo, el algoritmo clásico de PSO cuenta con algunos inconvenientes a la hora de hacer los cambios de posición dados por la Ecuación (2)

$$V_{k+1} = \omega V_k + \varphi_1(G_{best} - X_k) + \varphi_2(L_{best} - X_k). \quad (2)$$

Donde  $\omega$  es el peso inercial,  $G_{best}$  es el mejor global,  $L_{best}$  son los mejores locales y  $X_k$  es la posición de la partícula en la iteración  $k$ . La Ec. 2 tiende a salirse del rango inicial que fue dado para la optimización del problema, provocando así una pérdida en la convergencia del algoritmo y en el peor de los casos no encontrar la solución. Diferentes autores basándose en el problema anteriormente mencionado han presentado diferentes propuestas para solucionarlo [13,14]. Sin embargo, en el presente trabajo hemos hecho uso de la corrección a la Ecuación (2) que es presentada por Bratton and Kennedy [15], y es definida como sigue:

$$V_{k+1} = \chi(\omega V_k + \varphi_1(G_{best} - X_k) + \varphi_2(L_{best} - X_k)). \quad (3)$$

Donde  $\chi$  es definida como

$$\chi = \frac{2}{2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}. \quad (4)$$

Y donde  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , permitiéndonos la Ecuación (4) mantener regulado el cambio de posición dentro de los rangos iniciales de convergencia para nuestro problema de estudio.

La prueba de suma de rangos con signo de Wilcoxon, es una prueba no paramétrica que a partir de la comparación de la distribución de medianas de dos muestras, permite determinar si existe diferencia entre ellas [12].

## 2. Modelos matemáticos

El criterio general de optimización, es modelado a partir del error cuadrático que existe entre la imagen original normalizada y la imagen recuperada del interferograma, y un factor de suavizado de la primera derivada de la fase. De manera que se define como:

$$f_{opt}(z^k) = \alpha - \sum_{y=1}^R \sum_{x=1}^C \{ [I_N(x, y) - \cos[f(z^k, x, y)]]^2 + \lambda \{ [f(z^k, x, y) - f(z^k, x - 1, y)]^2 + [f(z^k, x, y) - f(z^k, x, y - 1)]^2 \} \}. \quad (5)$$

Donde  $x, y$  son valores enteros y representan el índice de localización de pixel en la imagen,  $I_N(x, y)$  es la imagen normalizada entre [-1,1],  $\alpha$  es usado para convertir el problema de minimización a maximización, y  $\lambda$  es el parámetro que controla el suavizado de las derivadas de la fase. Cabe mencionar que en el presente trabajo no se utilizó el término de suavizado.

La fase para el presente artículo fue modelada a partir de los polinomios ortogonales de Zernike en representación cartesiana definida como [16]:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^L z_j^k U_j(x, y). \quad (6)$$

Donde  $j$  es el índice de combinación lineal del polinomio de Zernike y  $L$  está dado por:

$$L = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (7)$$

$n$  es el grado del polinomio y  $U_j$  es la representación cartesiana de los polinomios de Zernike [1].

$z_j^k$  son los coeficientes de la combinación lineal de los polinomios de Zernike y están denotados por:

$$z^k = [z_1^k, z_2^k, z_3^k, \dots, z_L^k]. \quad (8)$$

Donde  $k$  es un índice que corre sobre el número de elementos de la población del algoritmo DE y PSO que se encargan de optimizar el interferograma a demodular.

Por otra parte, el criterio de convergencia utilizado en el algoritmo está dado por:

$$\left| \frac{\alpha - f_{opt}(z^*)}{\alpha} \right| < \epsilon. \quad (9)$$

Donde  $z^*$ , representa el vector de la población con el mejor valor de optimización,  $\epsilon$  es un error relativo de tolerancia. El criterio de paro que se definió es el cumplimiento del criterio de convergencia o se agotó el número de llamadas a función (NFL).

### 3. Descripción de los experimentos

Para el presente artículo, se realizaron cinco experimentos, generados a partir de un simulador de interferogramas, creado por los autores y basado en el modelo de la Ecuación (1). Cada experimento se generó utilizando la combinación lineal de polinomios de Zernike dado por la Ecuación (6), y los coeficiente  $z^k$  fueron generados a partir de valores aleatorios en el rango de  $[-1,1]$ . Los experimentos fueron capturados en imágenes de 40x40 pixeles, en la Fig. 1 se muestra un ejemplo de ello.

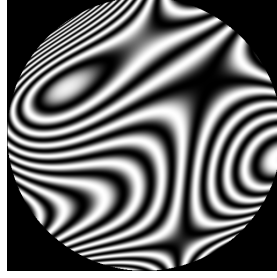


Figura 1: Interferograma modelado con polinomios de Zernike de cuarto grado.

## 4. Resultados experimentales

Para todos los experimentos se utilizó  $\alpha = 5000$ ,  $\lambda = 0$ ,  $NLF = 7000$  y  $\varepsilon = 0.0001$ . En el caso ED se tomaron los siguientes parámetros para todos los experimentos  $NP = 100$ ,  $F = 0.5$  y  $PC = 0.5$ , por otra parte, para el algoritmo PSO se tomó  $\omega = 1$ ,  $\varphi_1 = 10$ ,  $\varphi_2 = 8$  y  $NP = 100$ . El valor  $\alpha$  es usual en la literatura y el resto de los valores fueron propuestos de manera experimental no exhaustiva.

Para cada experimento se realizaron 32 repeticiones con cada algoritmo y se muestran las demodulaciones que obtuvieron un menor error de ajuste.

### 4.1. Experimento 1

En la Fig. 2 (a) se muestra la imagen del interferograma del experimento 1, que fue generada con el siguiente polinomio de Zernike:

$$f(x, y) = 0.25U_2 + 0.15U_3 + 0.54U_4 + 0.12U_5 - 0.34U_6 + 0.25U_7 + 0.19U_8 - 0.26U_9 + 0.32U_{10} + 0.09U_{11} + 0.03U_{12} + 0.02U_{13} - 0.02U_{14} + 0.01U_{15}. \quad (10)$$

Donde  $U_j = U_j(x, y)$  de la Ecuación (6), se usa por simplicidad.

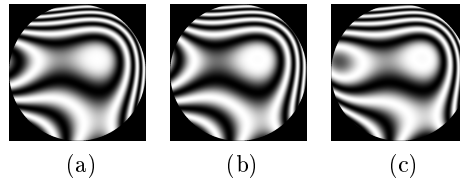


Figura2: El Interferograma original se muestra en (a), el interferograma recuperado por parte DE y PSO se muestra en (b) y (c) respectivamente para el experimento 1.

La Fig. 2 (b) muestra el resultado de recuperación por parte de DE alcanzando un error de ajuste de  $\varepsilon = 0.019$ , y en la Fig. 2 (c) muestra la recuperación para PSO alcanzado un error de ajuste  $\varepsilon = 0.03$ .

#### 4.2. Experimento 2

En la Fig. 3 (a) se muestra la imagen de interferograma para el experimento 2, que fue generado con el siguiente polinomio de Zernike:

$$f(x, y) = 0.40U_1 + 0.97U_2 + 0.67U_3 + 0.15U_4 - 0.69U_5 + 0.23U_6 - 0.60U_7 + 0.26U_8 + 0.10U_9 - 0.15U_{10} - 0.39U_{11} - 0.17U_{12} + 0.64U_{13} - 0.71U_{15}. \quad (11)$$

En la Fig(s). 3 (b) y (c) se muestra el interferograma recuperado, con errores de ajuste del orden de  $\varepsilon = 0.13$  y  $\varepsilon = 0.11$  respectivamente .

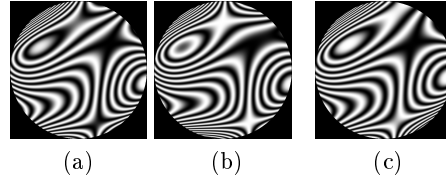


Figura3: El Interferograma original se muestra en (a), el interferograma recuperado por parte DE y PSO se muestra en (b) y (c) repectivamente para el experimento 2.

#### 4.3. Experimento 3

En la Fig. 4 (a) se muestra la imagen de interferograma para el experimento 3, que fue generado con el siguiente polinomio de Zernike:

$$f(x, y) = 0.1U_1 + 0.56U_2 + 0.34U_3 - 0.31U_4 - 0.41U_5 + 0.09U_6 + 0.78U_7 - 0.5U_8 + 0.12U_9 + 0.475U_{10} + 0.09U_{11} + 0.04U_{12} - 0.02U_{13} + 0.01U_{14} + 0.002U_{15}. \quad (12)$$

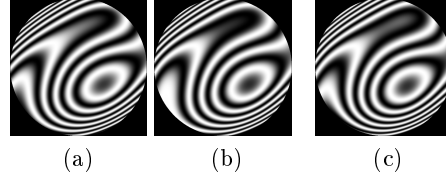


Figura 4: El Interferograma original se muestra en (a), el interferograma recuperado por parte DE y PSO se muestra en (b) y (c) repectivamente para el experimento 3.

En la Fig(s). 4 (b) y (c) se muestra el interferograma recuperado, con errores de ajuste del orden de  $\varepsilon = 0.033$  y  $\varepsilon = 0.039$ .

#### 4.4. Experimento 4

En la Fig. 5 (a) se muestra la imagen de interferograma para el experimento 4, que fue generado con el siguiente polinomio de Zernike:

$$f(x, y) = -0.40U_2 + 0.457U_3 + 0.939U_4 - 0.510U_5 + 0.262U_6 + 0.603U_7 + 0.947U_8 - 0.082U_9 + 0.580U_{10} - 0.181U_{11} + 0.381U_{12} - 0.023U_{13} + 0.270U_{14} - 0.136U_{15}. \quad (13)$$

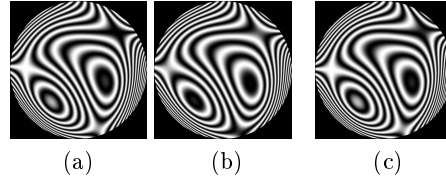


Figura 5: El Interferograma original se muestra en (a), el interferograma recuperado por parte DE y PSO se muestra en (b) y (c) repectivamente para el experimento 4.

En la Fig(s). 5 (b) y (c) se muestra el interferograma recuperado, con errores de ajuste del orden de  $\varepsilon = 0.11$  y  $\varepsilon = 0.06$ .

#### 4.5. Experimento 5

En la Fig. 6 (a) se muestra la imagen de interferograma para el experimento 5, que fue generado con el siguiente polinomio de Zernike:

$$f(x, y) = -0.86U_1 + 0.979U_2 - 0.09U_3 - 0.80U_4 - 0.03U_5 - 0.01U_6 + 0.09U_7 - 0.67U_8 + 0.05U_9 - 0.22U_{10} - 0.46U_{11} + 0.01U_{12} - 0.67U_{13} + 0.06U_{14} - 0.72U_{15}. \quad (14)$$

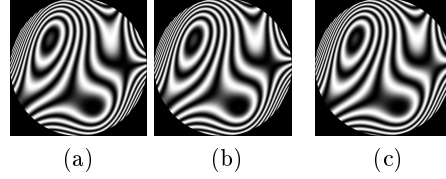


Figura 6: El Interferograma original se muestra en (a), el interferograma recuperado por parte DE y PSO se muestra en (b) y (c) respectivamente para el experimento 5.

En la Fig(s). 6 (b) y (c) se muestra el interferograma recuperado, con errores de ajuste del orden de  $\varepsilon = 0.016$  y  $\varepsilon = 0.047$ .

#### 4.6. Prueba de suma de rangos con signo de Wilcoxon

Para llevar a cabo la prueba se realizaron 32 repeticiones de cada experimento tomando los mismos parámetros iniciales para ambos algoritmos.

Los resultados estadísticos al aplicar los algoritmos DE y PSO en la demodulación de interferogramas, se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Resultados estadísticos de la demodulación de interferogramas utilizando DE y PSO (los valores presentados en la tabla corresponden a  $f_{opt}(z^*)$ , para cada algoritmo).

Experimento	DE			PSO		
	Mediana	$\bar{x}$	$\sigma^2$	Mediana	$\bar{x}$	$\sigma^2$
1	4827.0	4820.9	3036.9	4694.0	4682.7	7456.8
2	4299.0	4265.3	2789.1	4421.0	4390.3	9605.4
3	4694.0	4708.9	4376.1	4648.0	4659.6	6771.4
4	4331.0	4346.7	2768.5	4475.0	4505.3	7899.1
5	4874.0	4867.29	1875.2	4699.0	4709.1	1779.3

Aplicando la prueba de suma de rangos con signo de Wilcoxon, Cuyos resultados se muestran en la Tabla 2, con los parámetros elegidos y las mismas condiciones para cada uno de los algoritmos, nos da como resultado que *no es posible determinar una diferencia entre las distribuciones de los dos algoritmos*.



Tabla 2: Resultados de la prueba de suma con signo de Wilcoxon.

$T+$	$T-$	$T$	$T_0$
9	6	6	1

Por otra parte, medimos los tiempos de ejecución para cada una de las repeticiones para ambos algoritmos, y obtuvimos que en promedio el algoritmo DE demora 925 segundos, mientras que PSO tarda 921 segundos, para una computadora con procesador AMD Turion(tm) 64 X2 Mobile Technology TL-56  $\times$  2, y 2GB en RAM.

## 5. Conclusiones

Los resultados muestran que bajo las condiciones mencionadas, el algoritmo DE no es mejor que PSO, para llevar a cabo la demodulación de interferogramas de franjas cerradas modeladas con polinomios de Zernike. Los parámetros iniciales utilizados para los algoritmos, fueron encontrados de manera experimental, quedando abierta la posibilidad de encontrar (proponer) otros parámetros que mejoren el desempeño de los algoritmos.

Cabe mencionar que DE tiene menor dispersión de resultados de ajuste de fase que PSO, basándonos en los resultados para la varianza presentada en la Tabla 1. Lo que nos permite concluir que DE muestra evidencia sobre una mayor eficiencia (reproducibilidad) de los resultados utilizando los mismos parámetros iniciales.

El presente artículo muestra evidencia de que es posible usar diferentes tipos de algoritmos de Soft computing, ya que se han presentado dos métodos que pertenecen a diferentes ramas de algoritmos de optimización, por su parte DE pertenece a los algoritmos Evolutivos, mientras que PSO a los algoritmos de optimización por cúmulo de partículas.

**Agradecimientos.** Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo realizado para la elaboración del presente artículo y a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST, proyecto 4572. 12-P).

## Referencias

1. Malacara, D.: Optical Shop Testing (Wiley Series in Pure and Applied Optics). Wiley-Interscience (2007)
2. Hariharan, P.: Basics of Interferometry. Elsevier Science (2010)
3. Born, M., Wolf, E., Bhatia, A.: Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Cambridge University Press (1999)

4. Takeda, M., Ina, H., Kobayashi, S.: Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *Journal of the Optical Society of America* (1917-1983) **72** (January 1982) 156
5. Womack, K.H.: Interferometric phase measurement using spatial synchronous detection. Volume 429 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. (January 1983) 8
6. Cuevas, F.J., Servin, M., Stavroudis, O.N., Rodriguez-Vera, R.: Multi-layer neural network applied to phase and depth recovery from fringe patterns. *Optics Communications* **181** (July 2000) 239–259
7. Cuevas, F., Sossa-Azuela, J., Servin, M.: A parametric method applied to phase recovery from a fringe pattern based on a genetic algorithm. *Optics Communications* **203** (2002) 213 – 223
8. Mancilla, L.E., Carpio, J.M., Cuevas, F.J.: Demodulation of interferograms of closed fringes by zernike polynomials using a technique of soft computing. *Engineering Letters* **15**(1) (2007) 99–104
9. Jiménez, J.F., Sossa, H., Cuevas, F.J.: Particle swarm optimization applied to interferogram demodulation. In: *EVOLVE*. (2012) 327–337
10. Storn, R., Price, K.: Differential evolution a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. of Global Optimization* **11**(4) (December 1997) 341–359
11. Kennedy, J., Eberhart, R.C.: Particle swarm optimization. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*. (1995) 1942–1948
12. Wilcoxon, F.: Individual Comparisons by Ranking Methods. *Biometrics Bulletin* **1**(6) (1945) 80–83
13. Carlisle, A., Dozier, G.: An off-the-shelf PSO. In: *PSO Workshop*, Indianapolis, IN (April 2001)
14. Wáng, Y., Lǐ, B., Weise, T., Wang, J., Yuan, B., Tian, Q.: Self-Adaptive Learning Based Particle Swarm Optimization. *Information Sciences – Informatics and Computer Science Intelligent Systems Applications: An International Journal* **181** (2011) 4515–4538
15. Bratton, D., Kennedy, J.: Defining a standard for particle swarm optimization. In: *IEEE Swarm Intelligence Symposium*. (2007) 120–127
16. Carpio, M., Servin, M., Malacara, D.: Direct phase detection of lateral shear interferograms using a phase-locked loop. *Optics Communications* **108** (June 1994) 225–229